

مهندسی مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تجدید تعالیم و الگوسازی

و اصلاح

این فصل را با ما بخوان  
تا از ما شوی ...

## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

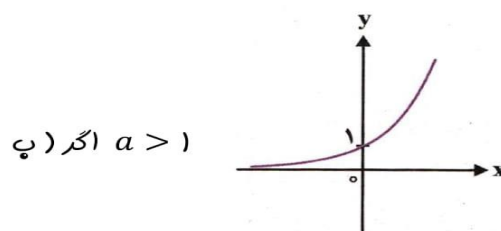
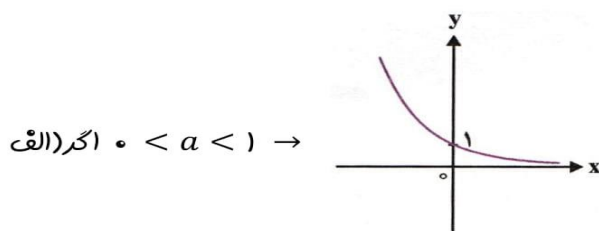
مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تایع نمائی: ✓

تعریف: هر تابع با ضابطه  $y = a^x$  که در آن  $a$  عددی حقیقی و  $a > 0$  و  $a \neq 1$  باشد، تابع نمائینامیده می شود. مانند توابع  $y = 3^x$  و  $y = (\frac{1}{2})^x$  و ...تذکر: اگر  $a = 1$  باشد، تابع به صورت  $y = 1^x = 1$  می شود که تابعی ثابت است و تابع نمائی

نیست.

نمودار تابع نمائی و ویژگی های آن: ✓

نمودار توابع نمائی  $y = a^x$  به یکی از دو صورت زیر است:

نمودار تابع نمائی و ویژگی های آن: ✓

دامنه تابع  $\mathbb{R}$  و برد بازه  $(0, +\infty)$  است.

تابع یک به یک بوده و در نتیجه معکوس پذیر است.

نمودار تابع محور  $y$  ها را در نقطه ای به عرض  $a$  قطع می کند، ولی محور  $x$  ها را قطع نمی کند.

## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندسی مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

به ازای کدام مقادیر  $k$  تابع  $y = \left(\frac{3-k}{k+1}\right)^x$  نمائی است ؟

مثال

برای این که تابع نمائی باشد طبق تعریف باید :

پاسخ

$$\text{اولاً } \frac{3-k}{k+1} > 0 \quad \begin{array}{c|c|c|c} k & -1 & 3 & \\ \hline & - & + & - \end{array} \longrightarrow k \in (-, 3) \quad (1)$$

و

$$\text{ثانیاً } \frac{3-k}{k+1} \neq 1 \rightarrow 3 - k \neq k + 1 \rightarrow 2k \neq 2 \rightarrow k \neq 1 \quad (2)$$

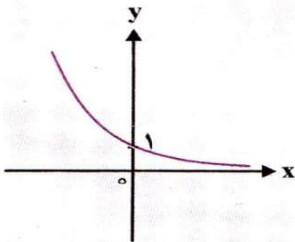
از اشتراک (1) و (2) مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $k$  به دست می آید :

$$(1) \cap (2) = (-, 3) - \{1\}$$

اگر نمودار تابع  $y = (a^2 - 4a + 4)^x$  در صورت نمودار مقابل باشد ، حدود و مقادیر

مثال

$a$  را به دست آورید .



با توجه به این نمودار ، باید داشته باشیم :

پاسخ

$$0 < a^2 - 4a + 4 < 1 \rightarrow 0 < (a - 2)^2 < 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} (a - 2)^2 > 0 \rightarrow a \in \mathbb{R} - \{2\} \\ (a - 2)^2 < 1 \rightarrow |a - 2| < 1 \rightarrow 1 < a < 3 \end{cases}$$

از اشتراک بازه های به دست آمده حدود مقادیر  $a$  به صورت  $1 < a < 3$  -  $\{2\}$  به دست می آید .

رسم نمودار  $y = 3^x$  و  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  با استفاده از نقطه گذاری .

مثال

## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

**نکته** نمودار تابع با ضابطه های  $y = a^x$  و  $y = a^{-x}$  ( $a \neq 1, a > 0$ ) نسبت به محور  $y$  ها قرینه اند.  $y = 3^x$  و  $y = (\frac{1}{3})^x$  قرینه اند.

**مثال** کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه  $y = 3^x$  قرار دارند؟

الف)  $(1, 0)$     ب)  $(3, 1)$     پ)  $(0, 1)$     ت)  $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$     ث)  $(3, 1)$     ج)  $(-1, \frac{1}{3})$

**مثال** کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه  $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$  روی نمودار تابع با ضابطه  $y = 5^x$  قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه  $y = 10^x$  با محور  $y$  ها، نقطه  $(0, 0)$  است.

پ) دامنه توابع با ضابطه های  $y = 3^x$  و  $y = x^3$  مساوی اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه  $y = 6^x$  با محور  $x$  ها، نقطه  $(6, 0)$  است.

**مثال** الف) نمودار تابع با ضابطه  $y = 3^x$  را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد  $3^{\sqrt{2}}$  را با توجه به نمودار به دست آورید.

ب) نمودار تابع با ضابطه  $y = (\frac{1}{3})^x$  را رسم کنید و مقدار تقریبی  $(\frac{1}{3})^0$  را با توجه به نمودار به دست آورید.

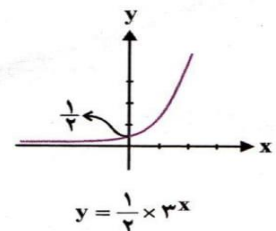
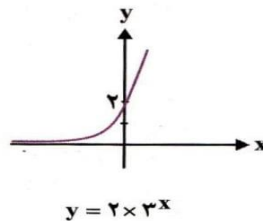
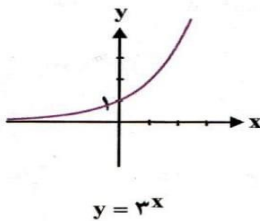
**مثال** فرض کنیم  $f(x) = 3^x, g(x) = (\frac{1}{3})^x$  و  $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید

الف)  $f(3)$     ب)  $g(-1)$     پ)  $h(-2)$

## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

**تذکر** به طور کلی توابعی به فرم  $y = ka^x$  نیز توابع نمائی است . شکل های زیر نمودار سه تابع  $y = 3^x$  و  $y = 2 \times 3^x$  و  $y = \frac{1}{3} \times 3^x$  را مشخص م کنند .



**مثال** اگر نمودار تابع نمائی  $f(x) = k \cdot a^x$  از دو نقطه  $(0, \frac{1}{\lambda})$  و  $(-2, \frac{1}{64})$  بگذرد، در این صورت مقدار تابع در نقطه ای به طول ۳ واقع بر آن چه قدر است ؟

**پاسخ**

$$\frac{(0, \frac{1}{\lambda}) \in f}{\rightarrow \frac{1}{\lambda} = k \cdot a^0 \Rightarrow k = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\frac{(-2, \frac{1}{64}) \in f}{\rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{\lambda} \cdot a^{-2} \Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{\lambda a^2} \Rightarrow 64 = \lambda a^2 \Rightarrow a^2 = \lambda \Rightarrow a = \pm \sqrt{\lambda}}$$

چون تابع نمائی است ، پس  $a = \sqrt{\lambda}$  قابل قبول است .

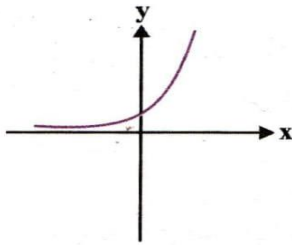
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda} (\sqrt{\lambda})^x = \frac{1}{\lambda} (2\sqrt{2})^x \Rightarrow f(3) = \frac{1}{\lambda} (2\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تمرینات تکمیلی:

۱) تابع  $y = (-a^2 + 3a - 1)^x$  به ازای چه مقادیری از  $a$  به شکل روپرو است؟



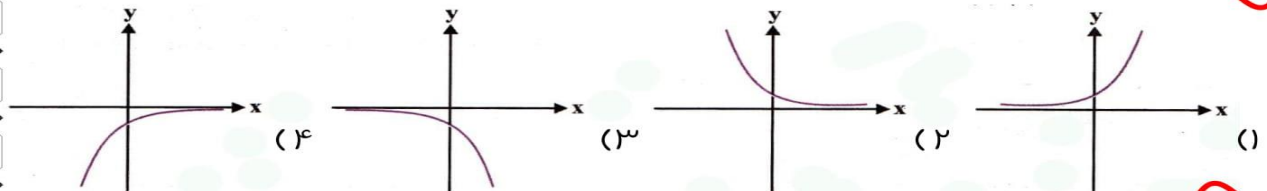
(۱)  $a > 1$

(۲)  $1 < a < 2$

(۳)  $a > 2$

(۴)  $a < 0$

۲) نمودار تابع  $y = \left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)^x$  به کدام صورت است؟



۳) معادله  $\cos x = 2^x$  چند جواب دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) بی شمار

۴) تابع  $f(x) = x^2$  مفروض است. اگر  $\frac{f(5)-f(3)}{f(3)-f(1)}$ ، آن گاه مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲)  $\sqrt{2}$

(۳) ۴

(۴)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

در تابع بهضابطه  $f(x) = k \cdot a^x$  داریم،  $f(0) = \frac{3}{2}$  و  $f(-2) = \frac{3}{32}$ ، مقدار  $f(\frac{3}{2})$  کدام است؟ (۵)

( سراسری تجربی - ۹۱ )

(۵) کدام است؟ ( $a > 0$ )

۸ (۴)

۱۲ (۳)

۲۴ (۲)

۶ (۱)

توان حقیقی: 

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت و  $r$  و  $s$  اعداد حقیقی باشند، آن گاه قوانین توان برای اعداد حقیقی همانند اعداد گویا برقرار است. به صورت زیر:

$$\diamond a^0 = 1 \xrightarrow{\text{مثال}} (\sqrt{2})^0 = 1$$

$$\diamond a^{-r} = \frac{1}{a^r} \xrightarrow{\text{مثال}} 2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$$

$$\diamond (a^r)^s = a^{r \cdot s} \xrightarrow{\text{مثال}} (2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} = 2^{2-2} = 2^0 = 1$$

$$\diamond a^r \cdot a^s = a^{r+s} \xrightarrow{\text{مثال}} 2^{\sqrt{3}} \cdot 2 = 2^{\sqrt{3}+1}$$

$$\diamond \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \xrightarrow{\text{مثال}} \frac{2^5}{2^{\sqrt{2}}} = 2^{5-\sqrt{2}}$$

$$\diamond \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \xrightarrow{\text{مثال}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}} = \frac{2^{\sqrt{2}}}{5^{\sqrt{2}}}$$

$$\diamond a^r \cdot b^r = (ab)^r \xrightarrow{\text{مثال}} (2 - \sqrt{2})^3 (2 + \sqrt{2})^3 = (4 - 2)^3 = 8$$

## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مثال حاصل عبارت  $\sqrt[3]{28+2\sqrt{8}+4} \left( \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{\sqrt{8}-2} \right)$  را بیابید.

پاسخ  $\left( \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{\sqrt{8}-2} \right)^{\sqrt[3]{28+2\sqrt{8}+4}} = \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{(\sqrt{8}-2)(\sqrt[3]{28+2\sqrt{8}+4})} = \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{(\sqrt{8})^3 - (2)^3}$

$= \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{8-8} = \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{-0} = (\sqrt[3]{2})^0 = 1$

توجه در محل این مثال از اتحاد  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$  استفاده کردیم.

### تمرینات تکمیلی:

۶ درباره عدد مثبت  $x$  می دانیم  $x^{\sqrt{2}} = 2$ . مقدار  $x$  با کدام برابر است؟

(۱)  $2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$  (۲)  $2^{\sqrt{2}}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

۷ از معادله  $x^{\sqrt{3}-1} \times x^{\sqrt{3}+1} = 8$  مقدار  $x$  برابر است با:

(۱)  $2^{\sqrt{3}}$  (۲)  $2^{\sqrt{3}}$  (۳)  $2^{\sqrt{3}}$  (۴)  $\left( \frac{1}{2} \right)^{\sqrt{3}}$

۸ حاصل  $\left( \sqrt[3]{8}^{\sqrt[3]{18}} \right)^{\sqrt[3]{12}}$  برابر است با:

(۱) ۵ (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳) ۲۵ (۴)  $\frac{1}{25}$



## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

۹  $\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = 2^A$  عدد  $A$  کدام است ؟

۱۲  $\sqrt{2}$  (۴)

۸  $\sqrt{2}$  (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

۱۰ حاصل  $\frac{(7\sqrt{5})\sqrt{5}+1}{\sqrt{7}\sqrt{5}-1} = 2^A$  برابر است با :

$\sqrt{7}^{2\sqrt{5}}$  (۴)

$7^{2\sqrt{5}}$  (۳)

$\sqrt[5]{7^6}$  (۲)

$7^3$  (۱)

### معادله نمائی :

اگر  $a$  عددی حقیقی و مثبت باشد ( $a \neq 1$ ) و داشته باشیم  $a^x = a^k$  آن گاه  $x = k$  است و بالعکس .

مثلاً از تساوی  $3^x = 3^5$  می توان نتیجه گرفت  $x = 5$  است .

مثال معادله های نمائی زیر را حل کنید .

الف)  $3^{2x-3} = 81$

ب)  $4^{2x-1} = 8^{x+1}$

پ)  $5^{2n-1} = 125^{n+1}$

ز)  $2^{-2x-1} + 4\left(\frac{1}{4}\right)^x - 72 = 0$

ت)  $3^{3n-2} = \frac{1}{3^{27}}$

ث)  $9^{3y-3} = 27^{y+1}$

ج)  $4^{3x+2} = \frac{1}{64^{33}}$

د)  $9^x = 3^{x^2-4x}$

س)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9}$

ر)  $125^{x-\frac{1}{3}} = 5^{6x+3}$

## درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

نامعادله نمائی:

$$a^x \geq a^k \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \rightarrow x \leq k \\ a > 1 \rightarrow x \geq k \end{cases}$$

$$3^x \leq 3^2 \Rightarrow x \leq 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow x \geq 2$$

مثال

نامعادله های زیر را حل کنید.

مثال

$$3^{-2x+3} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+1} \leq 0.09$$

تمرینات تکمیلی:

۱) حاصل ضرب ریشه های معادله  $8^{x+2} = 2^{x^2+2}$  کدام است؟

۲ ( )      ۲ (۳)      -۲ (۲)      -۴ (۴)

۲) از تساوی  $9^{x+4} = (36)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$  ، عدد  $x$  کدام است؟

۰ ( )       $\frac{1}{2}$  (۲)      ۱ (۳)       $\frac{3}{2}$  (۴)

۳) جواب نامعادله  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > 27$  چیست؟

۱ ( )  $x > 1$       ۲ ( )  $x < 1$       ۳ ( )  $x < -1$       ۴ ( )  $x > -1$

درس اول : تابع نمائی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

جواب تمرینات تکمیلی:

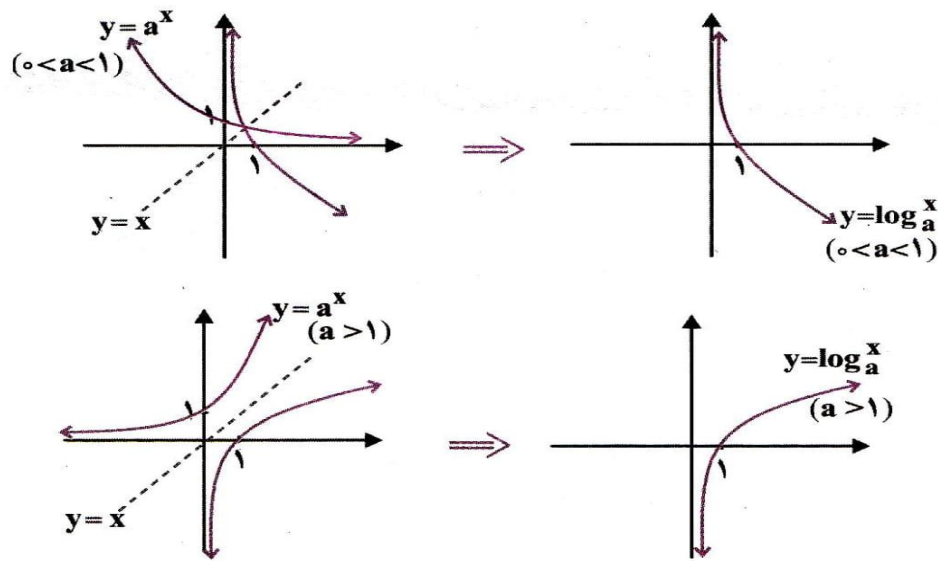
سؤال	گزینه صحیح
۱	۲
۲	۲
۳	۴
۴	۲
۵	۳
۶	۱
۷	۲
۸	۳
۹	۴
۱۰	۱
۱۱	۴
۱۲	۱
۱۳	۳

## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

☑ تابع لگاریتمی:

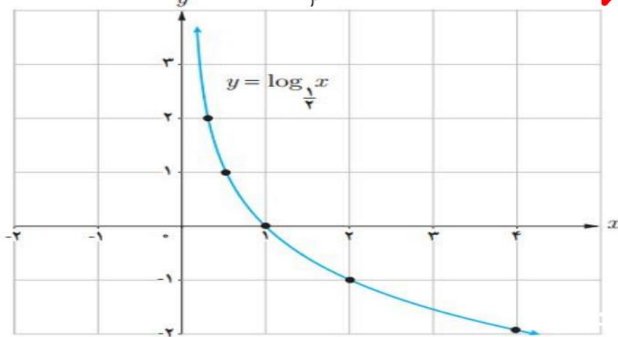
**تعریف** معکوس تابع نمائی  $y = a^x$  را به صورت  $y = \log_a x$  نشان می دهیم و می خوانیم « لگاریتم  $x$  در مبنای  $a$  ».



**مثال** نمودار تابع با ضابطه  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  را در نظر بگیرید . اعداد زیر پین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف)  $\log_{\frac{1}{2}} 3$  .....

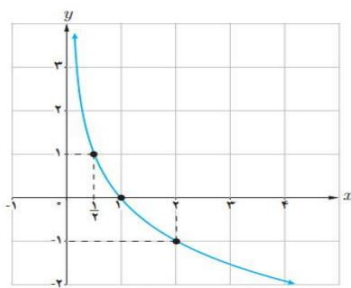
ب)  $\log_{\frac{1}{2}} (1/5)$  .....



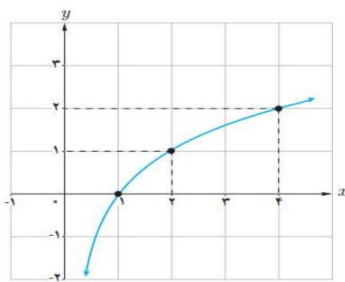
## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندسی مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

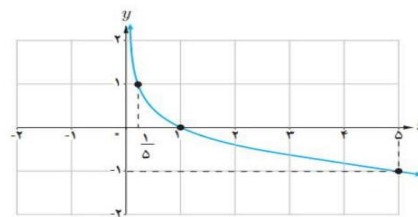
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.



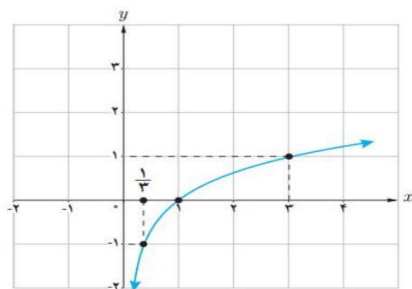
(۱)



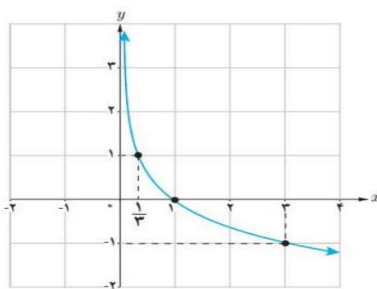
(۲)



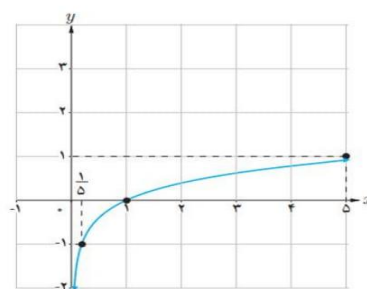
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

مثال با توجه به مطالبی که تا به حال خوانده اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

- دامنه تابع با ضابطه  $y = \log_a x$  ( $a > 1$ )، مجموع اعداد حقیقی مثبت و برد آن ..... است.

- دامنه تابع با ضابطه  $y = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ )، بازه ..... و برد آن ..... است.

- نمودار توابع فوق، محور  $x$  ها را در نقطه ..... قطع می کند و محور  $y$  ها را قطع نمی کند.

## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

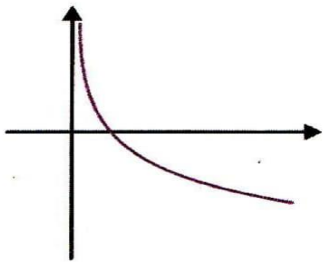
- این دو تابع ، یک به یک ..... زیرا خطوط موازی محور  $x$  ها ، نمودار آنها را حداکثر در ..... نقطه قطع می کند .

- وارون تابع نمایی ، تابع ..... است و وارون تابع لگاریتمی ، تابع ..... است .

مثال دامنه تابع  $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-2}{8}$  را بیابید .

تمرینات تکمیلی:

تابع  $f(x) = \log_{a-a^2} x$  به صورت روپرو است ، مقادیر  $a$  کدام است ؟



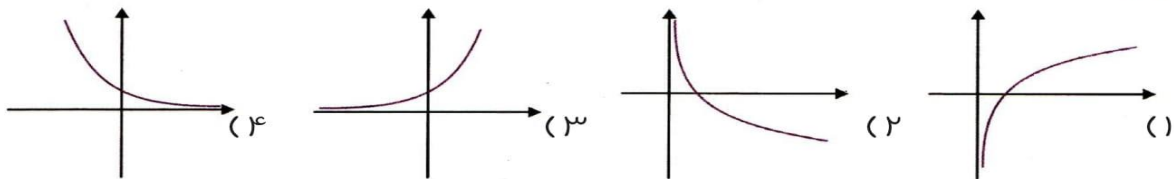
( )  $(0, 1) \cup (1, 2)$

(۲)  $a > 2$

(۳)  $a < 0$

(۴)  $a < 2$

نمودار تابع  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  به کدام یک از شکل های زیر شبیه است ؟



### درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

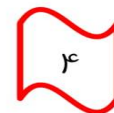
مهندسی مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

دامنه تابع با ضابطه  $\log_{10} \frac{x+2}{1-x}$  کدام است؟



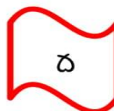
- (۱)  $(-2, 1)$       (۲)  $[-2, 1)$       (۳)  $(-2, 1)$       (۴)  $(-2, 1)$

دامنه تابع  $\log_x (2-x)$  کدام است؟



- (۱)  $(0, +\infty) - \{1\}$       (۲)  $(2, +\infty)$       (۳)  $(0, 2)$       (۴)  $(0, 2) - \{1\}$

اگر  $f(x) = \sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \log_{10} x + 3$  چند عدد صحیح عضو دامنه  $\frac{f}{g}$



است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

اگر  $0 < a < 1$  باشد، دو تابع  $y = \log_a x$  و  $y = a^x$  در چند نقطه و در کدام



ناحیه متقاطع اند؟

- (۱) یک نقطه در ناحیه دوم      (۲) یک نقطه در ناحیه اول

- (۳) دو نقطه در ناحیه اول      (۴) غیر متقاطع اند

نمودار توابع  $y = \sqrt{2^x}$  و  $y = \log_{\sqrt{2}} x$  در چند نقطه با یکدیگر متقاطع اند؟



- (۱) نقطه      (۲) ۲ نقطه      (۳) ۴ نقطه      (۴) غیر متقاطع اند

## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تبدیل لگاریتم به نمایی و برعکس:

$$\log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

مثال

$10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$	$\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$
$9^{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow \log_9 3 = \dots$	$\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = -4 \rightarrow 2^{-4} = \dots$
$4^2 = 64 \rightarrow \log_4 64 = \dots$	$\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = \dots$
$2^5 = 32 \rightarrow \dots = \dots$	$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \rightarrow \dots = \dots$
$2^{-3} = \dots \rightarrow \dots = \dots$	$\log_{\frac{1}{5}} 125 = \dots \rightarrow \dots = \dots$
$3^{-2} = \dots \rightarrow \dots = \dots$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \dots \rightarrow \dots = \dots$

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می نامند در این حالت معمولاً مبنای را نمی نویسیم

تذکر

یعنی به جای نوشتن  $\log_{10} a$  می نویسیم  $\log a$ .



## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

ویژگی های لگاریتم:

$$۱) \log_a 1 = 0$$

$$۲) \log_a a = 1$$

$$۳) \log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$۴) \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$۵) \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$۶) \log_b a^n = n \log_b a$$

$$۷) \log_b^m a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

$$۸) \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$۹) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$۱۰) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$۱۱) a^{\log_a b} = b$$

$$۱۲) \log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

مثال اگر  $\log 2 \approx 0.3$  و  $\log 3 \approx 0.48$ ، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

مثال

1)  $\log 12$

$$۲) \log 0.75 = \dots\dots\dots$$

$$۳) \log \sqrt{5} = \dots\dots\dots$$

$$۴) \log \frac{25}{18} = \dots\dots\dots$$

$$۵) \log \sqrt[3]{6} = \dots\dots\dots$$

$$۶) \log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{5}} = \dots\dots\dots$$

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

مثال

الف)  $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{49}$

ب)  $\log_3 27^{\frac{1}{2}}$

ب)  $-\log_5 125$

ت)  $3 \log_1 \sqrt{1000}$

## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

اگر  $f(x) = 3 - 2 \log_4 \left( \frac{x}{4} - 5 \right)$  ، مقدار  $f(42)$  را به دست آورید .

مثال

الف) اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_a x$  از نقطه  $(2, 2)$  عبور کند ، مقدار  $a$  را به دست آورید .

مثال

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_a x$  از نقطه  $(\frac{1}{4}, -4)$  عبور کند ، مقدار  $a$  چند است ؟

اگر  $\log 2 \approx 0.3$  مقدار تقریبی اعداد زیر را به دست آورید .

مثال

الف)  $\log 5 = ?$

ب)  $\log 0.25 = ?$

ج)  $\log \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}} = ?$

حاصل هر یک از عبارات زیر را به دست آورید :

مثال

الف)  $\log 2^4 - \frac{1}{2} \log 9 + \log 125 = ?$

ب)  $\log_2 \frac{8}{9} + \log_2 \frac{9}{10} + \log_2 \frac{10}{11} + \dots + \log_2 \frac{31}{32} = ?$

اگر  $\log_5 4 = k$  باشد حاصل  $\log 25$  را بر حسب  $k$  بدست آورید .

مثال

تمرینات تکمیلی:

مقدار عددی تابع  $\log_2 8 + \log_8 2$  با کدام برابر است ؟

۸

$\frac{10}{3}$  (۴)

$\frac{13}{3}$  (۳)

$-\log 2$  (۲)

$3 \log 2$  (۱)

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

۹ حاصل  $\frac{\log_7 49 + \log_7 5^3}{\log_3 \sqrt{3}}$  کدام است ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۰ نمودار تابع  $y = \log_p(ax + b)$  محور x ها را در نقطه ای به طول -۱ و نیمساز ناحیه ی چهارم را در نقطه ای به عرض -۱ قطع کرده است . b کدام است ؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۳

۱۱ اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  ، آن گاه حاصل  $\log \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$  چه قدر است ؟

- (۱)  $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$  (۲)  $\frac{b}{2} - \frac{a}{2}$  (۳)  $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$  (۴)  $-\frac{a+b}{2}$

۱۲ با فرض  $\log_b 3a^2 = 4$  ، مقدار  $\frac{\log a}{\log b}$  چه قدر است ؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۳ از دو معادله  $\log_3 x + \log_3 y = 2$  و  $x^2 + y^2 = 46$  ، لگاریتم  $(x + y)$  در پایه ۴ ، کدام است ؟

- (۱)  $1/5$  (۲) ۲ (۳)  $2/5$  (۴) ۳

۱۴ حاصل عبارت  $(\log 5)^2 + (\log 50)(\log 2)$  کدام است ؟

- (۱)  $\log 5$  (۲)  $\log 2$  (۳) ۱ (۴) ۲

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

۱۵) عبارت زیر با کدام برابر است؟

$$A = \log\left(\tan\frac{\pi}{30}\right) + \log\left(\tan\frac{3\pi}{30}\right) + \log\left(\tan\frac{7\pi}{30}\right) + \log\left(\tan\frac{9\pi}{30}\right)$$

(۱) ) (۲) ۲ (۲) ۰ (۳) ۴ (۴)

۱۶) اگر  $\log_a x = \frac{2}{3}$ ،  $\log_b x = \frac{3}{4}$  باشد،  $\log_{ab} x$  کدام است؟ (سنجش ریاضی - ۹۲)

(۱)  $\frac{17}{6}$  (۲)  $\frac{17}{12}$  (۳)  $\frac{17}{17}$  (۴)  $\frac{6}{17}$

۱۷) اگر  $x = \sqrt{a}^{\log_a b}$  باشد، آنگاه حاصل  $\log_b x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ) (۴) ۲

معادلات لگاریتمی:

$$\log_a x = b \xrightarrow{a > 0, a \neq 1} x = a^b \quad \text{و} \quad \log_a x = \log_a k \xrightarrow{a > 0, a \neq 1} x = k$$

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱)  $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$

۲)  $\log_5(x+6) = \log_5(2x-3) \rightarrow x+6 = 2x-3 \rightarrow x=9$  که  $x=9$  برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

$$۳) \log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1 \rightarrow \log_5[(x+6)(x+2)] = 1$$

$$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5$$

$$\rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x = -7 \text{ یا } x = -1$$

توجه کنید که  $x = -7$  قابل قبول نیست؛ از اینرو تنها جواب  $x = -1$  قابل قبول است که در معادله اصلی صدق می کند.

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱)  $\log_3 x = 3$  .....

۲)  $\log_7(2x+1) = 3$  .....

۳)  $\log_7(x+1) + \log_7(x+4) = 2$  .....

۴)  $\log_7 243 = 2x+1$  .....

۵)  $\log_7(x-1) = 4$  .....

۶)  $\log(2x) - \log(x-3) = 1$  .....

۷)  $2\log_7(x-1) = 3$  .....

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف)  $\log_7(p^2 - 2) = \log_7 p$

ب)  $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$

پ)  $3\log_7 a - \log_7 5 = \log_7 25$

ت)  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 21) = -2$

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید .

الف)  $\log(x + 6) - \log(6 - x) = \log(-x)$       ب)  $\log_a x^2 - 30 - \log_b x = 0$

ج)  $\log_2 \log_3 \log_4 (x - 1) = 0$

مثال اگر  $\log_x 3 + \log_x (2x + 9) = 2$  که  $\log_9 \sqrt{x}$  کدام است ؟

مثال از معادلات  $\log x = \log 2 + \log y$  و  $2^x \times 8^y = 4$  ، مقدار  $x$  کدام است ؟

تمرینات تکمیلی:

۱۸) از معادله لگاریتمی  $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$  ، مقدار لگاریتم  $(2x - 1)$  در

(سراسری تجربی - ۹۵)

پایه ۸ ، کدام است ؟

(۱)  $-\frac{2}{3}$       (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۹) از تساوی  $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$  ، مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۴ ، کدام

(سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۳)

است ؟

(۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴)  $-\frac{2}{3}$

۲۰) معادله  $\log_{16} x^2 + 3x = \sin \frac{5\pi}{2}$  چند جواب دارد ؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۰

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

۲۱) از تساوی  $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$  ، مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۲ ، کدام است ؟

( سراسری تجربی - ۹۳ )

- (۱) - (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

۲۲) اگر  $\log(x+1) = \log(2x+10)$  ، حاصل  $\log_x \sqrt[3]{x}$  چه قدر است ؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)  $-\frac{3}{2}$

۲۳) از تساوی  $\log(2x-1) + \frac{1}{2}\log x^2 = \log 3$  ، مقدار لگاریتم  $\frac{x}{3}$  در مبنای ۴ کدام است ؟

( سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸ )

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۲۴) از معادله لگاریتمی  $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$  ، مقدار لگاریتم

( سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۵ )

در  $\sqrt[3]{x+1}$  پایه ۴ ، کدام است ؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۱

۲۵) از دو معادله  $4^x + 3^x = 72$  و  $\log(x+1) + \log(2y + x^2) = \log(2y + x^2)$  ، مقدار  $y$  کدام است ؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۶) در تساوی  $\log(x-1) = (\log 2)^2 - (\log 5)^2$  ، مقدار  $x$  کدام است ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۰

## درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندسی مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مجموع جواب های معادله  $\log_{\delta} x - 10 \log_{\gamma\delta} x + 6 = 0$  کدام است ؟ ۲۷

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۷۵

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $\log_3 x \cdot \log_3 3x = 3$  باشد، آن گاه حاصل  $\frac{\alpha}{\beta}$  کدام است ؟ ۲۸

$(\alpha > \beta)$

- (۱)  $3^2$  (۲)  $3^9$  (۳)  $3$  (۴)  $3^3$

اگر تساوی  $\log_{\delta} x \times \log_x 5x = 3$ ، مقدار لگاریتم  $\log_3(x + 2)$  کدام است ؟ ۲۹

- (۱) ) (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مهندسی مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

جواب تمرینات تکمیلی:

سؤال	گزینه صحیح	سؤال	گزینه صحیح
۱	۱	۱۶	۴
۲	۲	۱۷	۲
۳	۴	۱۸	۴
۴	۴	۱۹	۳
۵	۳	۲۰	۲
۶	۲	۲۱	۴
۷	۲	۲۲	۴
۸	۴	۲۳	۱
۹	۴	۲۴	۲
۱۰	۱	۲۵	۳
۱۱	۳	۲۶	۳
۱۲	۴	۲۷	۳
۱۳	۱	۲۸	۳
۱۴	۳	۲۹	۳
۱۵	۳		

**درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی**

مهندسی مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مثال نمودار توابع  $y = 2^x - 3$  و  $y = 2 + \log x$  را با انتقال رسم کنید .

مثال نمودار توابع  $y = 2^{x-1}$  و  $y = \log(x+1)$  را با انتقال رسم کنید .

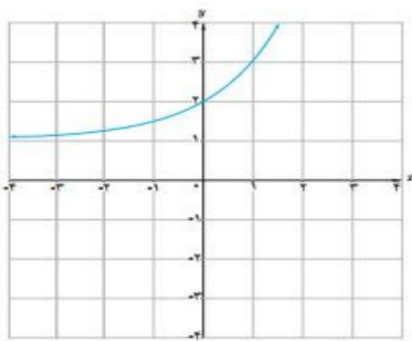
مثال نمودار توابع  $y = 2^{-x}$  و  $y = \log(-x)$  و  $y = -\log x$  را با استفاده از بازتاب رسم کنید.

مثال نمودار تابع  $y = |1 - 2^{-x}|$  را رسم کنید .

مثال نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید .

الف)  $k(x) = -\log_2 x$

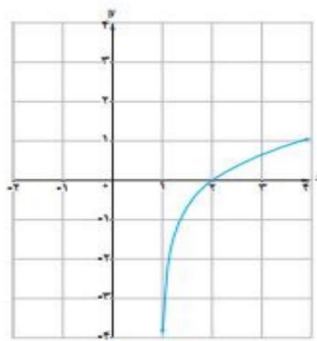
ت)  $g(x) = \log_2(x-1)$



(۱)

ب)  $l(x) = 2 + \log_2 x$

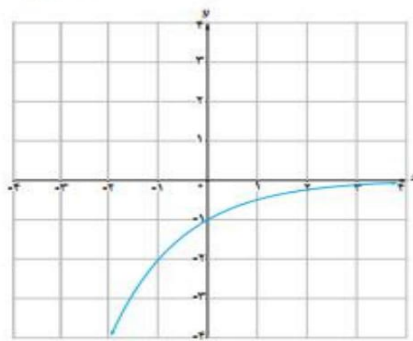
ت)  $z(x) = 3^{(x-1)}$



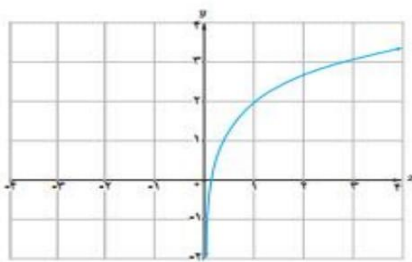
(۲)

ب)  $h(x) = -(\frac{1}{2})^x$

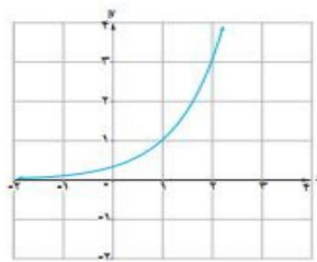
ج)  $f(x) = 2^{x+1}$



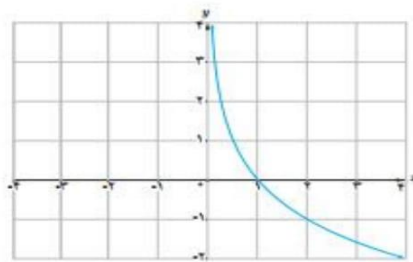
(۳)



(۴)



(۵)



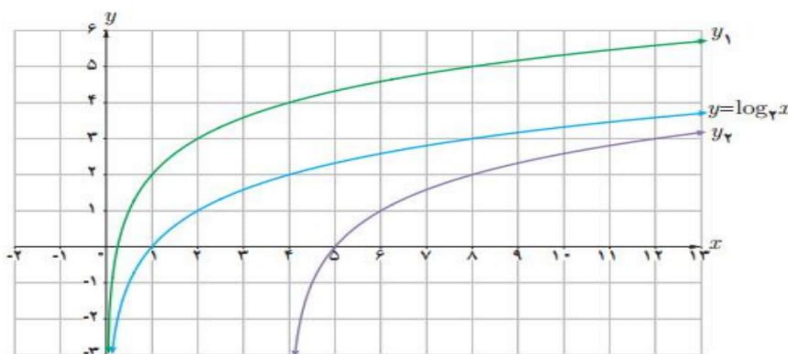
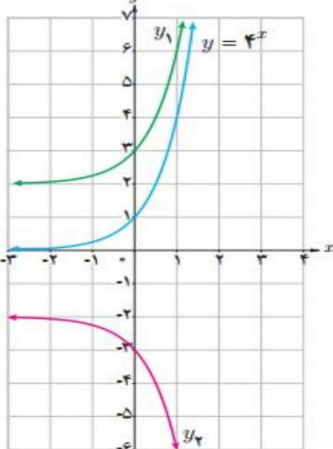
(۶)

### درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مثال

در شکلهای زیر ، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته های آنها رسم شده است. ضابطه توابع انتقال یافته را بنویسید .



مثال

کدام یک از ضابطه ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند ؟

۱)  $y = \log_2(x-1)$

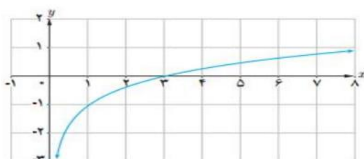
۲)  $y = 3^x + 1$

۳)  $y = 1 - 3^x$

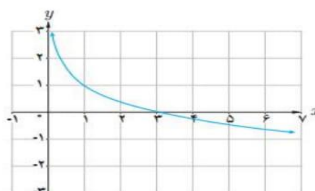
۴)  $y = \log_2(x-1)$

۵)  $y = 1 - \log_2 x$

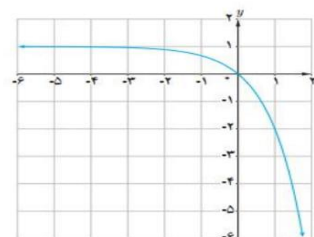
۶)  $y = 3^{(x-2)}$



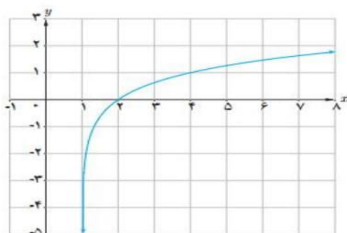
(الف)



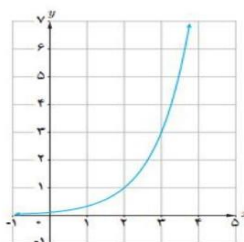
(ب)



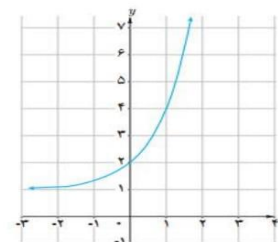
(پ)



(ت)



(ث)



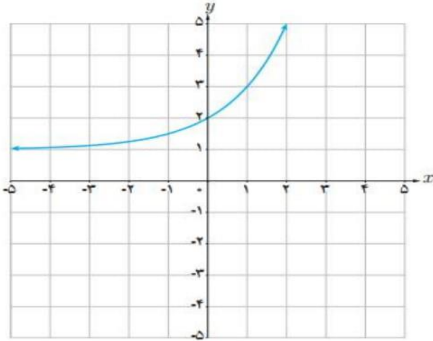
(ج)

(۲)

**درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی**

**مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷**

مثال در دستگاه مختصات رویه رو نمودار تابع یا ضابطه  $y = a + 2^{(x-b)}$  رسم شده است .



$a$  و  $b$  را به دست آورید .

مثال فرض می کنیم  $g(x) = 2 + 4^x$  . الف  $(-1)$  را به دست آورید . ب) اگر  $g(x) = 66$  مقدار  $x$

چقدر است؟

مثال نمودار تابع یا ضابطه  $y = 4^x - 1$  را در بازه  $[2, -2]$  رسم کنید .

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید .

الف)  $y = -2^{-x} + 1$

ب)  $y = -\log_2(x - 1)$

مثال نمودار تابع  $f(x) = \log_2(1 - x)$  را ابتدا در امتداد محور  $x$  ها دو واحد به چپ و سپس در

امتداد محور  $y$  ها ۳ واحد به پایین انتقال می دهیم ضابطه تابع جدید را بنویسید .

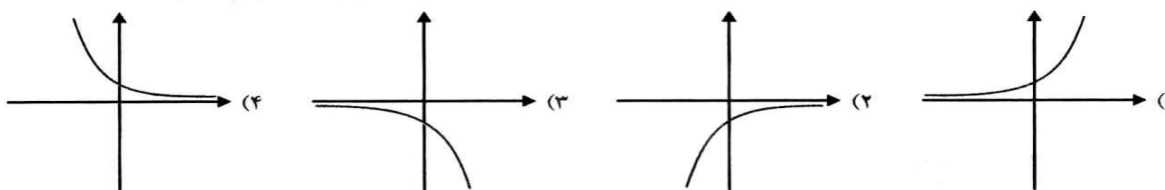
مثال فاصله نقطه تقاطع نمودارهای دو تابع  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$  و  $y = 27^x$  از مبدأ مختصات کدام است؟

**درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی**

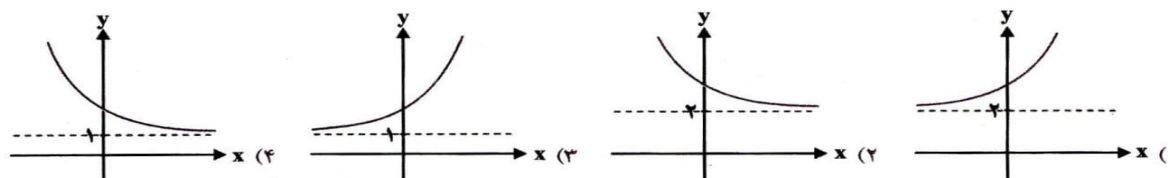
مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تمرینات تکمیلی:

۱) نمودار تابع  $f(x) = (\frac{1}{2})^{-x}$  کدام است؟



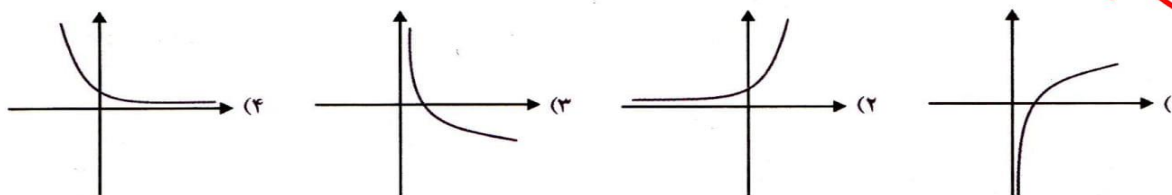
۲) نمودار تابع  $y = 2^{x-1} + 2$  کدام است؟



۳) نمودار تابع  $y = 2^{2x} - 2$  از کدام ناحیه یا نواحی عبور نمی کند؟

(۱) اول و چهارم (۲) سوم و چهارم (۳) دوم (۴) از هر ۴ ناحیه عبور می کند.

۴) نمودار تابع  $y = (\log_2 3)^x$  به کدام صورت است؟

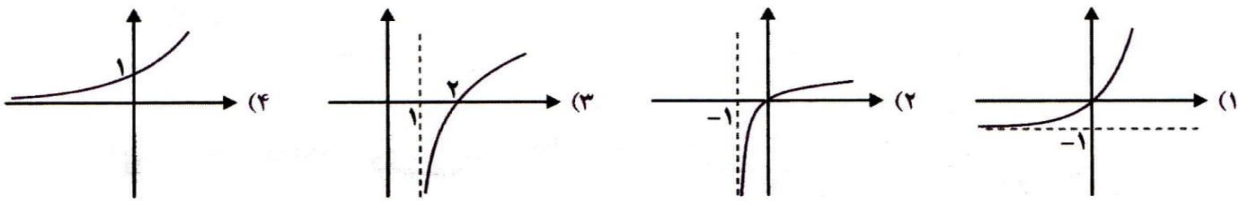


سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی

۵

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

نمودار  $y = \log_3(x - 1)$  در کدام گزینه آمده است؟



نمودارهای دو تابع  $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$  و  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  نسبت به هم چگونه اند؟ (سراسری)

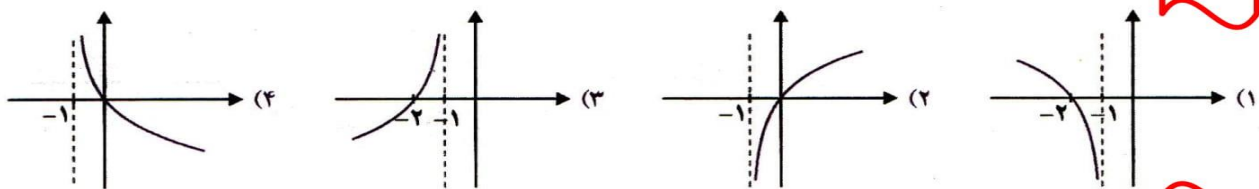
۶

خارج از کشور تجربی - (۹)

(۱)  $f(x)$  بالاتر (۲)  $g(x)$  بالاتر (۳) منطبق اند (۴) فقط در یک نقطه متقاطع

نمودار تابع  $y = -\log(-x - 1)$  در کدام است؟

۷



با کدام انتقال نمودار  $y = 8 \times 2^{x+1} - 1$  به نمودار  $y = 2^{x+1} + 2$  تبدیل می شود؟

۸

(۱) ۳ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا (۲) ۳ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین

(۳) ۳ واحد به راست و ۳ واحد به بالا (۴) ۳ واحد به راست و ۳ واحد به پایین

با کدام انتقال نمودار  $y = \log_3(x - 1)$  به نمودار  $y = \log_3 9x$  منتقل می شود؟

۹

**درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی**

**مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷**

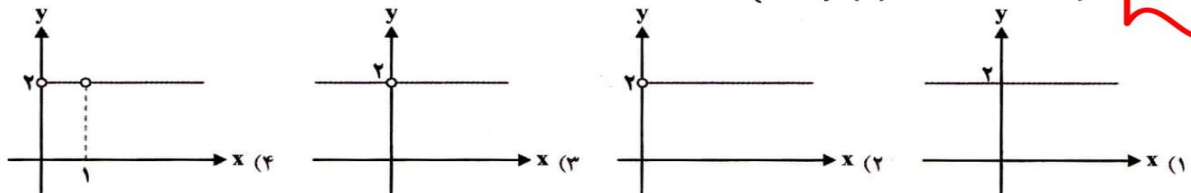
(۱) واحد په چپ و ۲ واحد په بالا

(۲) واحد په راست و ۹ واحد په بالا

(۳) واحد په چپ و ۹ واحد په بالا

(۴) واحد په راست و ۲ واحد په بالا

۱۰) نمودار  $f(x) = x^{\log x}$  کدوم است ؟



۱۱) نمودارهای دو تابع  $f(x) = 3^{ax+b}$  و  $g(x) = (\frac{1}{9})^x$  در نقطه ای به طول ۱- متقاطع

هستند. اگر  $f(2) = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $f^{-1}(27)$  کدوم است ؟ (سراسری ریاضی - ۹۵)

- (۱) -۳
- (۲) -۲
- (۳) ۱
- (۴) ۳

۱۲) نمودار تابع  $y = 3 - \log_4(x + 4)$ ، محورهای مختصات را در دو نقطه  $(a, 0)$  و  $(0, b)$  قطع می کند. حاصل  $a + b$  کدوم است ؟

- (۱) ۹۳
- (۲) ۶۲
- (۳) ۲۸
- (۴) ۲۷

۱۳) فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات  $y = 3^x$  و  $y = (\sqrt{2})^{x+1}$ ، از نقطه  $A(0, 4)$  کدوم است ؟ (سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۳)

- (۱) -۳
- (۲) -۲
- (۳) ۱
- (۴) ۳

## درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

 کاربرد توابع نمائی و لگاریتمی:

 محاسبه میزان انرژی آزاد شده در زلزله:

اگر بزرگی زلزله ای در مقیاس ریشتر برابر  $M$  باشد ، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر  $E$  در واحد  $(Erg)$  است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

مثال در سال ۱۳۶۹ زلزله ای با قدرت  $7/2$  ریشتر منطقه رودبار را لرزاند . انرژی آزاد شده در این زلزله مهیب چه قدر بوده است ؟

$$\log E = 11/8 + 1/5 (7/2) = 22/6 \Rightarrow 10^{22/6} (Erg)$$

مثال انرژی آزاد شده توسط زلزله ای حدود  $10^{21/7} (Erg)$  است . قدرت زلزله در مقیاس ریشتر چه قدر بوده است ؟

$$\log 10^{21/7} = 11/8 + 1/5 M = 21/7 \log 10 = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow 21/7 = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 9/9 = 1/5 M \Rightarrow \frac{9/9}{1/5} \approx 6/6 \text{ ریشتر}$$



درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تمرینات تکمیلی:

۱۴) انرژی آزاد شده زلزله با قدرت ۶ ریشتر چند برابر انرژی آزاد شده زلزله با قدرت ۴ ریشتر

است؟

۱۰۰۰ (۴)

۸۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۵۰ (۱)

۱۵) انرژی آزاد شده در یک زلزله حدوداً ۵/۵ ریشتری حدوداً چند برابر است؟

۱۰<sup>۲۰</sup> (۴)

۱۰<sup>۱۵</sup> (۳)

۱۰<sup>۱۰</sup> (۲)

۱۰<sup>۵</sup> (۱)

مثال) اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می شود. اندازه هر توده باکتری بعد از  $t$  ساعت از رابطه زیر به دست می آید:

$$p(t) = 100 \times 2^{2t} \quad (0 \leq t \leq 16)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با:

$$p(3) = 100 \times 2^6 = 6400$$